103 年建國中學高二(下)第二次段考試題(自)

【範圍】：2−2~3−3

一、單選題：

1. 三元一次聯立方程組 $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ x+y-z=2 \\ 5x+5y+2z=3 \end{cases}$ 的增廣矩陣為 $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，對矩陣 A 進行高斯消去法的一個步驟：第一、二列不改變，並將第三列減去第二列的五倍成為新的第三列。試問下列哪一個選項中的矩陣乘積代表對 A 進行上述步驟？

   $(A)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}A$ $(B)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}A$ $(C)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}A$ $(D)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}A$ $(E)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}A$

2. ★空間中，直線 L：$x=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$ 與下列哪一直線距離最遠？

   $(A)L_1$：$x-2=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-1}$　　$(B)L_2$：$x-1=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-1}{-6}$

   $(C)L_3$：$\begin{cases} x=2+3t \\ y=0 \\ z=3+2t \end{cases}$，$t\in R$　　$(D)L_4$：$\frac{x+1}{2}=y-4=\frac{z-2}{3}$

   $(E)L_5$：$\begin{cases} x+y=5 \\ y-z=5 \end{cases}$

二、多選題：

1. 空間中，下列何者與 L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{3}$ 有交點？

   $(A)2x-y+3z=1$　　$(B)x-y-z=0$

   $(C)\begin{cases} x=-1-t \\ y=6+2t \\ z=-9-3t \end{cases}$，$t\in R$　　$(D)\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-3t \\ z=-3+t \end{cases}$，$2\le t\le 3$

   $(E)\frac{x}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$

2. 下列哪些選項中的矩陣，經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$？

   $(A)\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & -11 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$　　$(B)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$(C)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & -8 & -40 \end{bmatrix}$　　$(D)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$(E)\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. 已知 A，B，C 均為二階方陣，I 為二階單位方陣，請選出正確的選項：

(A)若 A 為轉移矩陣，且 A 為可逆矩陣(即反矩陣 A^{-1} 存在)，則 A^{-1} 亦為轉移矩陣

(B)若 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$，則 $AB=BA$

(C)若 $AB=I=BC$，則 $A=C$

(D)若 A，B，C 均為轉移矩陣，則 $A+B+C$ 亦為轉移矩陣

(E)若 A 為轉移矩陣，且 $\det(A)=\det(A^{-1})$，則 $A=I$

三、填充題：

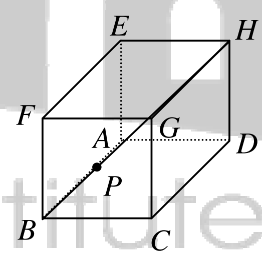
1. 若點 $P(x_0,y_0,z_0)$是平面 $x-4y+8z-3=0$ 上一點，則 $\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0-1)^2+(z_0-3)^2}$ 的最小值為_______。

2. 若坐標空間中通過點 $A(2,3,1)$，$B(0,2,5)$，且與直線 $x-1=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 平行的平面方程式為 $ax+by+cz=1$，則 a，b，c 之值分別為_______。

3. 已知空間中三平面 $x-5y=0$，$3x-7y=0$，$5x-5y+4z=20$ 與 xy 平面圍成之封閉區域為一四面體，試求四面體之體積為_______。

4. 空間中，已知直線 M：$x=y-1=z+1$ 為直線 L_1：$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ 與 L_2 的交角角平分線，且直線 L_2 的參數式 $\begin{cases} x=at \\ y=1+by \\ z=-1+t \end{cases}$，$t\in R$，則 a，b 之值分別為_______。

5. 如圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中，已知 $\overline{AD}=4$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AE}=1$，若對角線 $\overline{BH}$ 上有一點 P 使得 $\overline{PF}\perp\overline{PG}$，則 P 點坐標為_______。



6. 已知 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ 有唯一解 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$，試求 $\begin{bmatrix} 2b_1 & 3a_1 & c_1 \\ 2b_2 & 3a_2 & c_2 \\ 2b_3 & 3a_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2d_1 \\ 2d_2 \\ 2d_3 \end{bmatrix}$ 之解

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$=______。

7. 已知 A 為一矩陣，且 $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$，若 $A\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，則數對$(a,b)$=______。

8. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}$，若 $A^nB=\begin{bmatrix} 1093 \\ 2187 \end{bmatrix}$，$n\in N$ 且 $r\in R$，則數對(n,r)=______。

9. 已知$\begin{cases} x=2\alpha+\beta \\ y=3\alpha+2\beta \end{cases}$且$\begin{cases} \alpha=u+v \\ \beta=u-v \end{cases}$，利用矩陣的乘法可得：$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，其中 A 是一個二階方陣，試求矩陣 A=______。

10. ★已知 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，試求：

(1)若 $A^2=aA+bI$，其中 a，b 均為實數，I 為二階單位方陣，則數對(a,b)=______。

(2)試求 $A^4-5A^3+9A^2-3A+9I$=______。

11. 設有甲報、乙報兩種報紙，經統計後發現：在某社區裡，訂閱甲報者，經一年後仍訂甲報者為 75%，改訂乙報者為 25%；訂閱乙報者，經一年後仍訂乙報者為 60%，而改訂甲報者為 40%。假設此社區訂報總數不變，且每年維持相同的訂報變化，在經長期的觀察下，發現甲、乙兩報的訂報率趨於穩定，則此穩定狀態中，甲報的訂報率應該為______。

103 年建國中學高二(下)第二次段考試題詳解(自)

高　遠老師主解

一、單選題：

1. 【答】：(C)

【解】：$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\times(-5) \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$

2. 【答】：(E)

【解】：$d(L,L_1)=\sqrt{\dfrac{38}{3}}$，$d(L,L_2)=\dfrac{4}{\sqrt{38}}$，$d(L,L_3)=\dfrac{5}{\sqrt{38}}$，$d(L,L_4)=\dfrac{12}{\sqrt{38}}$，$d(L,L_5)=\sqrt{\dfrac{50}{3}}$

故 L 與 L_5 之距離最近

二、多選題：

1. 【答】：$(A)(C)$

【解】：(A)○

(B)×：$\overrightarrow{e}=(1,-2,3)$，$\overrightarrow{N}=(1,-1,-1)$，$\because \overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{N}=0$，$\therefore L$ 與平面平行

(C)○：兩線重合

(D)×：當 $t=0$，兩線有交點，但 $2\le t\le 3$，故 L 與線段不相交

(E)×：兩線歪斜

2. 【答】：$(B)(E)$

【解】：$\begin{bmatrix}1&2&3&3\\0&2&1&-5\\1&4&5&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x+2y+3z=3\\2y+z=-5\\x+4y+5z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\y=-4\\z=3\end{cases}$

(A)×：無限多解

(B)○

(C)×：無限多解

(D)×：解為$(-6,3,1)$

(E)○

3. 【答】：$(B)(C)$

【解】：(A)×

(B)○

(C)○

(D)×：$\dfrac{1}{3}(A+B+C)$為轉移矩陣

$(E)\times$：<反例>：$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，則 $\det(A)=\det(A^{-1})$，但 $A\neq I$

三、填充題：

1. 【答】：2

【解】：所求="$P(x_0,y_0,z_0)$到 $Q(1,1,3)$之距"之 $\min=d(Q,\text{平面})=\dfrac{|1-4+24-3|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+8^2}}=2$

2. 【答】：$a=3$，$b=-2$，$c=1$

【解】：$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,4)$，$\overrightarrow{e}=(1,2,1)$

$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{e}=(-9,6,-3)=-3(3,-2,1)$

所求 E：$3x-2y+z\overset{B(0,2,5)}{=}1$，$\therefore a=3$，$b=-2$，$c=1$

3. 【答】：$\dfrac{20}{3}$

【解】：$\begin{cases}x-5y=0\text{—①}\\3x-7y=0\text{—②}\\5x-5y+4z=20\text{—③}\\z=0\text{—④}\end{cases}$

①②③$\Rightarrow A(0,0,5)$

①②④$\Rightarrow O(0,0,0)$

①③④$\Rightarrow B(5,1,0)$

②③④$\Rightarrow C(7,3,0)$

$\because\overrightarrow{OA}=(0,0,5)$，$\overrightarrow{OB}=(5,1,0)$，$\overrightarrow{OC}=(7,3,0)$

$\therefore$求 $V=\dfrac{1}{6}\times\left|\begin{vmatrix}0&0&5\\5&1&0\\7&3&0\end{vmatrix}\right|=\dfrac{20}{3}$

4. 【答】：$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{4}{3}$

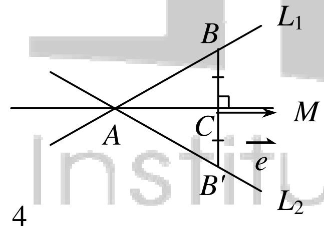
【解】：1° L_1，M 之交點為 $A(0,1,-1)$

2° 在 L_1 上取一點 $B(4,3,2)$，令 $C(t,t+1,t-1)$

$\because\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{e}$，$\therefore(t-4,t-2,t-3)\cdot(1,1,1)=0$

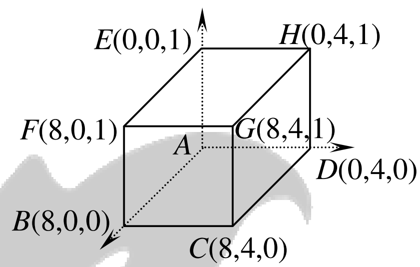
$\Rightarrow t=3$，故 $C(3,4,2)$

利用向量 $\Rightarrow B'(2,5,2)$



3° L_2 之 $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{AB'}=(2,4,3)//(a,b,1)$，$\therefore a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{4}{3}$

5. 【答】：$(\frac{64}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{9})$



【解】：1° $\vec{e}=\overrightarrow{BH}=(-8,4,1)$，令 P：$\begin{cases} x=8-8t \\ y=0+4t \\ z=0+t \end{cases}$

2° $\overrightarrow{PF}=(8t,-4t,1-t)$，$\overrightarrow{PG}=(8t,4-4t,1-t)$

$\because \overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PG}=0$，$t=\frac{1}{9}$ $\quad\Rightarrow P(\frac{64}{9},\frac{4}{9},\frac{1}{9})$

6. 【答】：$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

【解】：1° 原式$\Rightarrow a_1\times6+b_1\times5+c_1\times3=d_1$—①

2° 求式$\Rightarrow 2b_1x+3a_1y+c_1z=2d_1$ $\quad\Rightarrow a_1(\frac{3y}{2})+b_1(x)+c_1(\frac{z}{2})=d_1$—②

3° 由①②比較係數$\Rightarrow\begin{cases} \frac{3y}{2}=6 \\ x=5 \\ \frac{z}{2}=3 \end{cases}$ $\quad\Rightarrow\begin{cases} x=5 \\ y=4 \\ z=6 \end{cases}$

7. 【答】：$(17,-7)$

【解】：$A\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

$A\cdot\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 17 \\ -7 \end{bmatrix}$ $\quad\Rightarrow(a,b)=(17,-7)$

8. 【答】：$(6,3)$

【解】：$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 1+r \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix} 1 & 1+r+r^2 \\ 0 & r^3 \end{bmatrix}$ $\quad\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} 1 & 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} \\ 0 & r^n \end{bmatrix}$

$A^nB=\begin{bmatrix} 1 & 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} \\ 0 & r^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+r+r^2+\cdots+r^n \\ r^{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1093 \\ 2187 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases} 1+r+r^2+\cdots+r^n=1093 \\ r^{n+1}=2187 \end{cases}$ $\quad\Rightarrow\begin{cases} r=3 \\ n=6 \end{cases}$

9. 【答】：$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

【解】：$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\therefore A=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

10. 【答】：(1)(5,−8)；(2)$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

【解】：(1)$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -10 & 2 \end{bmatrix}$

$aA+bI=a\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3a+b & a \\ -2a & 2a+b \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=7 \\ a=5 \\ -2a=-10 \\ 2a+b=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-8 \end{cases}$

(2)$\because A^2=5A-8I$，$\therefore A^2-5A+8I=O$

$A^4-5A^3+9A^2-3A+9I$

$=(A^2-5A+8I)(A^2+I)+(2A+I)$

$=2A+I=2\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{rrr|rrrrr} & & & 1 & 0 & 1 & & \\ \hline 1 & -5 & 8 & 1 & -5 & 9 & -3 & 9 \\ & & & 1 & -5 & 8 & & \\ \hline & & & & & 1 & -3 & 9 \\ & & & & & 1 & -5 & 8 \\ \hline & & & & & & 2 & 1 \end{array}$$

11. 【答】：$\frac{8}{13}$

【解】：$A=\begin{array}{c} \\ 甲 \\ 乙 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 甲 & 乙 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.75 & 0.4 \\ 0.25 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$，$X=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$

$\because AX=X$，$\therefore \begin{bmatrix} 0.75 & 0.4 \\ 0.25 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x=\frac{8}{13}$